超Virasoro代数におけるArkhipov-Soergel双対性 (組合せ論的表現論の諸相)

古閑, 義之

数理解析研究所講究録 1382 巻 2004 年 216-225

超 Virasoro 代数における Arkhipov-Soergel 双対性

古閑義之 福井大学・工学部

1 導入

ここで述べる Arkhipov-Soergel 双対性とは, S. Arkhipov により semi-infinite homology の理論を用いて与えられた有限の Verma flag を持つ加群のなす圏と有限の contragredient Verma flag を持つ加群のなす圏の間の圏同値のことである [A]. W. Soregel は, この双対性と Bernstein-Gerfand-Gelfand 双対性を組み合わせて, Kac-Moody 代数の Tilting 加群の指標公式を得ている [S]. なお, [S] では, semi-infinite homology の理論を用いることなしに, 局所リー代数, つまり $\mathbb{Z}$-次数付きリー代数 $\mathfrak{g}=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}^n$ で, その local part $\mathfrak{g}^{-1}\oplus\mathfrak{g}^0\oplus\mathfrak{g}^1$ から生成されるリー代数, に対してこの圏同値が証明されている. また, [S] 結果の超リー代数類似は J. Brundan により考察されている [B].

ここでは, 超 Virasoro 代数の場合にも, 同様の圏同値が成立することを報告する. 但し, 超 Virasoro 代数は必ずしも局所超リー代数とは限らないため, 局所的でない $\mathbb{Z}$-次数付き超リー代数の場合もふくめて, [S] や [B] と同様の双対性が成立することを述べる. また, 最後の節で, 圏同値を具体的に記述する際に重要となる, semi-infinite 指標 (定義は第 2 節) の例を, いくつかの超 Virasoro 代数の場合に与えることにする.

なお, この研究は, 神戸大学理学部の庵原謙治さんとの共同研究です.

導入の続きとして, Virasoro 代数の central charge z の Verma 加群の構造と $26-z$ の Verma 加群の構造における類似性について述べる. 以下で述べる類似性が, Arkhipov-Soergel 双対性の根拠となる.

Vir $:=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}L_n\oplus\mathbb{C}c$ を Virasoro 代数, つまり交換関係が

$$[L_m,L_n]=(m-n)L_{m+n}+\frac{m^3-m}{12}c,\quad [L_n,c]=0$$

で与えられるリー代数とする. $M(z,h)$ で central charge z, conformal weight h の最高ウェイトをもつ Vir の Verma 加群を表す. また, $L(z,h)$ で既約最高ウェイト表現を表すことにする. 最高ウェイトが

$$z = 1 - 6\frac{(p-q)^2}{pq}, \quad h = h_{r,s} := \frac{(rp-sq)^2 - (p-q)^2}{4pq},$$

但し, p, q, r, s は

$$(p,q) = 1, \quad 1 \le r < q, \quad 1 \le s < p$$

を満たす自然数, で与えられる既約最高ウェイト表現は, 極小系列表現ともよばれ, 応用上重要である.

このときの Verma 加群の構造は, Verma 加群の間の埋め込みを用いて, 次のように記述できる [FF]:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots M(z,h_4) \arrow[r] \arrow[ddr] & M(z,h_3) \arrow[r] \arrow[ddr] & M(z,h_2) \arrow[r] \arrow[ddr] & M(z,h_1) \arrow[dr] & \\
 & & & & M(z,h_0), \\
\cdots M(z,h_{-4}) \arrow[r] \arrow[uur] & M(z,h_{-3}) \arrow[r] \arrow[uur] & M(c,h_{-2}) \arrow[r] \arrow[uur] & M(z,h_{-1}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

但し,$\{h_i | i \in \mathbb{Z}\}$ は

$$h_i := \begin{cases} h_{-iq+r,s} & i \equiv 0 \pmod 2 \\ h_{-(i+1)q+r,-s} & i \equiv 1 \pmod 2 \end{cases},$$

で定義される.

$(z', h'_i) := (26, 1) - (z, h_i)$ とおくと, Virasoro 代数の Verma 加群 $M(z', h'_i)$ の構造には, 次のような類似性がある:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots M(z,h'_4) & M(c,h'_3) \arrow[l] \arrow[ddl] & M(z,h'_2) \arrow[l] \arrow[ddl] & M(z,h'_1) \arrow[l] \arrow[ddl] & \\
 & & & & M(z,h'_0). \arrow[ul] \arrow[dl] \\
\cdots M(z,h'_{-4}) & M(z',h'_{-3}) \arrow[l] \arrow[uul] & M(z',h'_{-2}) \arrow[l] \arrow[uul] & M(z',h'_{-1}) \arrow[l] \arrow[uul] &
\end{tikzcd}$$

この類似性を記述する際に現れた $(26,1)$ というウェイトは, semi-infinite 指標と呼ばれるものになっている.

同様の類似性は, $N = 1$ Virasoro 代数の Verma 加群の構造においても存在する [IK]. その場合の semi-infinite 指標については, 最後の節であたえる.

2 $\mathbb{Z}$-次数付き超リー代数の Semi-infinite 指標

以下の節を通して, $\mathfrak{g} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}^n$ は $\mathfrak{g}^n = \mathfrak{g}^n_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}^n_{\bar{1}}$ を満たす $\mathbb{Z}$-次数付き超リー代数とする, 但し, $\mathfrak{g}^n_\tau := \mathfrak{g}^n \cap \mathfrak{g}_\tau$ $(\tau \in \mathbb{Z}_2)$ とする. 以下, 次の記号を用いる. $\mathfrak{g}^\pm := \bigoplus_{\pm n\in\mathbb{Z}_{>0}} \mathfrak{g}^n$ $\mathfrak{g}^\geq := \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^+$, $\mathfrak{g}^\leq := \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^-$ とおく.

以下, $\mathfrak{g}$ は次の条件を満足すると仮定する:

仮定 1. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ について, $\dim \mathfrak{g}_n < \infty$.

Arkhipov-Soergel 双対性について述べるため, critical cocycle と呼ばれる $\mathfrak{g}$ の 2-cocycle とそれに関連する $\mathfrak{g}^0_{\bar{0}}$ の指標 (Semi-infinite 指標) が必要となる. ここでは, 超リー代数の設定のもとでのそれらの定義を与える.

$\pi^+ : \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}^+$ を直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^+ \oplus \mathfrak{g}^{\leq 0}$ に関する射影とし, $\iota^+ : \mathfrak{g}^+ \hookrightarrow \mathfrak{g}$ を自然な埋め込みとする. $\pi := \iota^+ \circ \pi^+ : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ とおく. 以下, $1|0$-次元 (even part 1 次元, odd part 0 次元) ベクトル空間 $\mathbb{C}^{1|0}$ を $\mathbb{C}$ と略記する.

定義 2.1. 以下で定義される $\omega \in \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}, \mathbb{C})$ を $\mathfrak{g}$ の *critical cocycle* と呼ぶ:

$$\omega(x, y) := \mathrm{str}_\mathfrak{g}([\pi \circ \mathrm{ad}\, x, \pi \circ \mathrm{ad}\, y] - \pi \circ [\mathrm{ad}\, x, \mathrm{ad}\, y]),$$

但し, $\mathrm{str}_\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ 上の *super trace.*

定義よりすぐに, 次の性質が証明される.

補題 2.1. $x \in \mathfrak{g}^m_\sigma$, $y \in \mathfrak{g}^n_\tau$ について,

1. $m + n \neq 0$ または $\sigma + \tau \neq \bar{0}$ ならば, $\omega(x, y) = 0$.

2. $m = n = 0$ ならば, $\omega(x, y) = 0$.

3. $m = -n \in \mathbb{Z}_{>0}$ ならば,

$$\omega(x, y) = (-1)^{\sigma\tau} \mathrm{str}_{\bigoplus_{k=1}^{m} \mathfrak{g}_{-k}}(\mathrm{ad}\, y \circ \mathrm{ad}\, x).$$

従って特に仮定 1 のもとで, ω は well-defined. また, ω が 2-cocycle 条件を満たすことも直接計算により証明される.

ここでは, 更に, $\mathfrak{g}$ の critical cocycle ω について, 以下の仮定をおく.

仮定 2. ω は 0-cohomologue, つまり, $\gamma \in \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ が存在して, $\omega = d\gamma$,

ただし, d は coboundary operator (ここでは, $d\gamma(x,y) := -\gamma([x,y])$ と選ぶ). $\mathfrak{g}$ の第 2 cohomology $H^2(\mathfrak{g})$ が消えるような $\mathfrak{g}$ は, この仮定を満足する事に注意する.

先の補題より, $\gamma|_{\mathfrak{g}^m} \equiv 0$ $(m \neq 0)$ と仮定してよい. また, $\gamma|_{[\mathfrak{g}^0,\mathfrak{g}^0]} \equiv 0$. したがって, γ は, $\mathfrak{g}^0$ の even な指標を与える. この指標を, [S] に従って, ここでは semi-infinite 指標と呼ぶ.

補題 2.1.3 を用いることで, (超) Virasoro 代数に対して semi-infinite 指標を求めることができる.

例 2.1. *Virasoro* 代数. $\mathrm{Vir} := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}L_n \oplus \mathbb{C}c$ を交換関係

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n,0} + \delta_{m+n,0}\frac{m^3-m}{12}c, \quad [c, L_m] = 0$$

で定義されるリー代数とする.

$$\mathrm{Vir}_n := \begin{cases} \mathbb{C}L_0 \oplus \mathbb{C}c & n=0 \\ \mathbb{C}L_n & n \neq 0 \end{cases}$$

とおき, $\mathrm{Vir} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Vir}_n$ により, Vir を $\mathbb{Z}$-次数付きリー代数とみなす. このとき, Vir は $H^2(\mathrm{Vir}) = \{0\}$ を満たし, したがって, *semi-infinite* 指標 $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Vir}_0, \mathbb{C})_{\bar{0}}$ が存在する. 具体的には,

$$\gamma(c) = 26, \quad \gamma(L_0) = 1$$

で与えられる.

他のいくつかの超 Virasoro 代数の semi-infinite 指標に関して, 最後の節でその具体形を与える.

3 Arkhipov-Soergel 双対性

以降の節では, $\mathfrak{g}$ は, 仮定 1, 仮定 2 を満足する $\mathbb{Z}$-次数付き超リー代数とする. また, 超リー代数の表現は, $\mathbb{Z}_2$-次数付けされたもののみを考えることとする.

Arkhipov-Soergel 双対性の定式化のために必要な記号を準備する. $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2$ で次数付けられたベクトル空間 $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\bigoplus_{\tau\in\mathbb{Z}_2} V_\tau^n$, $W = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\bigoplus_{\tau\in\mathbb{Z}_2} W_\tau^n$ および $m \in \mathbb{Z}$, $\sigma \in \mathbb{Z}_2$ に対して,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)_\sigma^m := \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W) \mid f(V_\tau^n) \subset W_{\tau+\sigma}^{n+m} \ (\tau \in \mathbb{Z}_2, n \in \mathbb{Z})\}$$

とおく. さらに, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)^m := \bigoplus_{\tau\in\mathbb{Z}_2}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)^m_\tau$,

$$\mathcal{H}om_{\mathbb{C}}(V,W) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)^n$$

とおく.

以下, $\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}_{\mathbb{Z}_2}\mathfrak{g}$ を $\mathbb{Z}$-次数付けされた左 $\mathfrak{g}$-加群の圏で, その射が,

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}_2}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{g}}(V,W) := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,W)^0_{\bar{0}}$$

で与えられるものとする.

Arkhipov-Soergel 双対性とは, 以下で定義される二つの圏の間の圏同値.

定義 3.1. *$\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{K}$) を以下で定義される $\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}_{\mathbb{Z}_2}\mathfrak{g}$ の充満部分圏とする:*

M が $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{K}$) の対象 $\Leftrightarrow$ M は有限ランクの free (resp. cofree) $\mathfrak{g}^-$-加群.

定理 1. *$\mathcal{M}$ から $\mathcal{K}$ への covariant な圏同値で, 短完全列を短完全列に移すものが存在する.*

この定理の証明には, 前節で述べた semi-infinite 指標を用いて構成される $\mathfrak{g}$ の semi-regular 両側加群を用いる. 証明の概略については次の節で述べる.

続いて, この定理の系として得られる $\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ の間の圏同値について述べることにする.

$\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}_2}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{g}$ の対象 M について, $M^* := \mathcal{H}om_{\mathbb{C}}(M,\mathbb{C})$ を $\mathfrak{g}$ の anti-pode を用いて, 左 $\mathfrak{g}$-加群とみなす.

命題 3.1. *関手 $M \mapsto M^*$ は, $\mathcal{K}$ から $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ への covariant な圏同値.*

以下, 定理 1 の関手と命題 3.1 の関手の合成関手の性質を述べるため, いくつかの記号を準備する. E を有限次元 $\mathfrak{g}_0$-加群, $n\in\mathbb{Z}$ とする. E を

$$E_m := \begin{cases} E & m=n \\ \{0\} & m\neq n \end{cases}$$

により, $\mathbb{Z}$-次数付き $\mathfrak{g}_0$-加群とみなす. 更に, $\mathfrak{g}^+|_E \equiv 0$ により E を $\mathbb{Z}$-次数付き $\mathfrak{g}^{\geq}$-加群とみなし,

$$\Delta(E) := U(\mathfrak{g})\otimes_{\mathfrak{g}^{\geq}} E$$

とおく ($n\in\mathbb{Z}$ は省略する).

γ を $\mathfrak{g}$ の semi-infinite 指標とする. この時, $\mathbb{C}_\gamma = \mathbb{C}\mathbf{1}_\gamma$ を

$$|\mathbf{1}_\gamma| = \bar{0}, \quad x.\mathbf{1}_\gamma = \gamma(x)\mathbf{1}_\gamma \ \ (x\in\mathfrak{g}^0)$$

で定義される $\mathfrak{g}^0$ の $1|0$-次元表現とする.

定理 2. $\mathcal{M}$ から $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ への *covariant* な圏同値 Θ で,

1. 短完全列を短完全列に移す,

2. 任意の $\mathfrak{g}^0$-加群 E について, $\Theta(\Delta(E)) \simeq \Delta(\mathbb{C}_\gamma \otimes E^*)$,

を満足するものが存在する.

例 3.1. $\mathfrak{g}$ が *Virasoro* 代数のとき, 例 *2.1* より, $\Theta(M(z,h)) \simeq M(26-z, 1-h)$, 但し, $M(z,h)$ は *central charge* z, *conformal weight* h の *Virasoro* 代数の *Verma* 加群.

4 Semi-regular 両側加群と定理 1 の証明の概略

以下, $U(\mathfrak{g}^-)$ を両側 $\mathfrak{g}^-$-加群とみなし,

$$U(\mathfrak{g}^-)^{\circledast} := \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathbb{C}}(U(\mathfrak{g}^-), \mathbb{C})$$

を以下の作用により, 両側 $\mathfrak{g}^-$-加群とみなす.

左作用: $(x.\phi)(m) = (-1)^{|x|(|\phi|+|m|)}\phi(m.x)$,

右作用: $(\phi.x)(m) = \phi(x.m)$,

但し, $x \in \mathfrak{g}^-$, $\phi \in U(\mathfrak{g}^-)^{\circledast}$. $U(\mathfrak{g}^-)$ が $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ で次数付けられた $\mathfrak{g}^-$-加群であることより, $U(\mathfrak{g}^-)^{\circledast}$ は $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ で次数付けられた $\mathfrak{g}^-$-加群となることに注意する.

$\mathfrak{g}$ の Semi-regular 両側加群を導入する.

定義 4.1. $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}^0, \mathbb{C})_{\bar{0}}$ を仮定 *1*, 仮定 *2* をみたす $\mathbb{Z}$-次数付き超リー代数 $\mathfrak{g}$ の *semi-infinite* 指標とする. $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ で次数付けされたベクトル空間である

$$S_\gamma(\mathfrak{g}) := U(\mathfrak{g}^-)^{\circledast} \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{g}^{\geq})$$

上に, 以下の同型達を用いて, 左 $\mathfrak{g}$-加群および右 $\mathfrak{g}$-加群の構造を導入する:

1. 左加群の構造について:

$$S_\gamma(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathbb{C}}(U(\mathfrak{g}^-), U(\mathfrak{g}^{\geq})) \simeq \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathfrak{g}^{\geq}}(U(\mathfrak{g}), \mathbb{C}_{-\gamma} \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{g}^{\geq})),$$

2. 右加群の構造について:

$$S_\gamma(\mathfrak{g}) \simeq U(\mathfrak{g}^-)^{\circledast} \otimes_{\mathfrak{g}^-} U(\mathfrak{g}),$$

但し, $\mathbb{C}_{-\gamma}$ は, $1|0$-次元 $\mathfrak{g}^0$-加群 $\mathbb{C}_{-\gamma}$ を $\mathfrak{g}^+|_{\mathbb{C}_{-\gamma}}$ により左 $\mathfrak{g}^{\geq}$-加群とみなしたもので, $\mathbb{C}_{-\gamma} \otimes U(\mathfrak{g}^{\geq})$ は左 $\mathfrak{g}^{\geq}$-加群としてテンソル積.

直接計算により, 次の定理が得られる.

定理 3. $S_\gamma(\mathfrak{g})$ 両側 $\mathfrak{g}$-加群, つまり, 上の左作用と右作用は可換.

最後に, Semi-regular 両側加群 $S_\gamma(\mathfrak{g})$ を用いた定理 1 の証明の概略について述べる. $\mathcal{M}$ から $\mathcal{K}$ への関手を $S_\gamma(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{g}} (\cdot)$ で定義する. また, $\mathcal{K}$ から $\mathcal{M}$ への関手を $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(S_\gamma(\mathfrak{g}), \cdot)$ で定義すると, これら二つの関手は互いに逆関手となり, $\mathcal{M}$ と $\mathcal{K}$ は圏同値であることが示される.

5 超 Virasoro 代数の semi-infinite 指標

この節では, いくつかの超 Virasoro 代数の semi-infinite 指標の具体形について述べる.

例 5.1. ($N = 1$ 超 *Virasoro* 代数) $\varepsilon \in \{\frac{1}{2}, 0\}$ について,

$$\mathrm{Vir}_\varepsilon := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}L_n \oplus \bigoplus_{m\in\varepsilon+\mathbb{Z}} \mathbb{C}G_m \oplus \mathbb{C}c,$$

を以下の交換関係で定義される超リー代数とする:

$$\begin{aligned}
&|L_n| = |c| = \bar{0}, \quad |G_m| = \bar{1},\\
&[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \delta_{m+n,0}\frac{1}{12}(m^3 - m)c,\\
&[G_m, L_n] = (m - \frac{1}{2}n)G_{m+n},\\
&[G_m, G_n] = 2L_{m+n} + \delta_{m+n,0}\frac{1}{3}(m^2 - \frac{1}{4})c,\\
&[\mathrm{Vir}_\varepsilon, c] = \{0\}.
\end{aligned}$$

$\mathrm{Vir}_{\frac{1}{2}}$ は, *Neveu-Schwarz* 代数, Vir_0 は, *Ramond* 代数と呼ばれる超リー代数である. 各 $n \in \mathbb{Z}$ について,

$$(\mathrm{Vir}_\varepsilon)_n := \{x \in \mathrm{Vir}_\varepsilon | [L_0, x] = -\frac{n}{2}x\}$$

とおくとにより，$\mathrm{Vir}_\varepsilon = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(\mathrm{Vir}_\varepsilon)_n$ は仮定 *1* と仮定 *2* をみたす $\mathbb{Z}$-次数付き超リー代数となる．これらの超リー代数について，*semi-infinite* 指標 $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}^0, \mathbb{C})_{\bar{0}}$ は，

$$\gamma(c) = 15, \quad \gamma(L_0) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \varepsilon = \frac{1}{2} \\ \frac{5}{8} & \varepsilon = 0 \end{cases}$$

で与えられる．

例 5.2. ($N=2$ 超 *Virasoro* 代数) $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\frac{1}{2}, 0\}$ について，

$$\mathrm{Vir}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}L_n \oplus \bigoplus_{m\in\varepsilon_1-\varepsilon_2+\mathbb{Z}} \mathbb{C}I_m \bigoplus_{i=1}^{2} \bigoplus_{k_i\in\varepsilon_i+\mathbb{Z}} \mathbb{C}G^i_{k_i} \oplus \mathbb{C}c,$$

を以下の交換関係で定義される超リー代数とする．

$$\begin{aligned}
&|L_n| = |I_m| = |c| = \bar{0}, \qquad |G^i_{k_i}| = \bar{1}, \\
&[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{1}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}c, \\
&[L_m, G^i_n] = \left(\frac{m}{2} - n\right) G^i_{m+n}, \\
&[G^i_m, G^j_n] = 2\delta_{ij}L_{m+n} + \sqrt{-1}(m-n)\varepsilon_{ij}I_{m+n} + \frac{1}{3}\left(m^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{ij}\delta_{m+n,0}c, \\
&[I_m, I_n] = \frac{1}{3}m\delta_{m+n,0}c, \\
&[I_m, G^i_n] = \sqrt{-1}\sum_{j=1}^{2}\varepsilon_{ij}G^j_{m+n}, \\
&[I_m, L_n] = mI_{m+n},
\end{aligned}$$

但し，$\{\varepsilon_{ij}\}$ は次で与えられる定数:

$$(\varepsilon_{ij})_{1\le i,j\le 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(\mathrm{Vir}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2})_n := \{x \in \mathrm{Vir}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} | [L_0, x] = -\frac{n}{2}x\}$$

とおくとにより，$\mathrm{Vir}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(\mathrm{Vir}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2})_n$ は仮定 *1* と仮定 *2* をみたす $\mathbb{Z}$-次数付き超リー代数となる．これらの超リー代数について，*semi-infinite* 指

標 $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}^0, \mathbb{C})_{\bar{0}}$ は,

$$\gamma(c) = 6, \quad \gamma(L_0) = \begin{cases} 0 & (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{4} & (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, 0) \\ \frac{1}{4} & (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2}) \end{cases}, \quad \gamma(I_0) = 0$$

で与えられる, 但し, $I_0 \in \mathrm{Vir}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ となるのは $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ の場合のみ.

$\mathrm{Vir}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ と $\mathrm{Vir}_{0,0}$ の間には, *spectral flow* と呼ばれる同型が存在する. ただし, それらは $\mathbb{Z}$-次数付き超リー代数としての同型ではないため, *semi-infinite* 指標は一致はしない.

注意 5.1. $N=3$ 超 *Virasoro* 代数, $\mathfrak{su}(2)$-不変な $N=4$ 超 *Virasoro* 代数に関しても, 同様に *semi-infinite* 指標 γ を決定できる. $\gamma(c)$ (c は中心元) の値は, 以下の表で与えられる.

	$N=0$(*Virasoro*)	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$
$\gamma(c)$	26	15	6	0	-12

これらは, それぞれの超 *Virasoro* 代数の *critical central charge* と呼ばれる値に一致している (*cf.* [*KV*]).

最後になりましたが, この報告の内容に関して発表の機会を与えてくださった大阪大学の山根宏之氏と共同研究者である神戸大学の庵原謙治氏に感謝致します.

References

[A] S. Arkhipov, *Semi-infinite cohomology of associative algebras and bar duality*, Internat. Math. Res. Notices, no. **17**, (1997), 833–863.

[B] J. Brundan, *Tilting modules for Lie superalgebras*, preprint (2002).

[FF] B. Feigin and D. Fuchs, *Representations of the Virasoro algebra*, Adv. Stud. Contemp. Math. 7, 465–554, Gordon and Breach Science Publ. New York, 1990.

[IK] K. Iohara and Y. Koga, *Representation Theory of Neveu-Schwarz and Ramond Algebras I: Verma Modules*, Adv. in Math. **178**, (2003), 1–65.

[KV] V. Kac and J. van de Leur, *On classification of superconformal algebras*, Strings '88, World Scientific, (1989), 77–106.

[S] W. Soergel, *Character formulas for tilting modules over Kac-Moody algebras*, Representation Theory (Erectronic J. of AMS) **2**, (1998), 432–448.

[V] A. Voronov, *Semi-infinite homological algebra*, Invent. Math. **113**, (1993), 103–146.